## **基础课32 等差数列**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 等差数列的通项公式与前项和公式 | 掌握 | 2023年新高考Ⅰ卷  2023年新高考Ⅰ卷  2023年新高考Ⅱ卷  2023年全国甲卷（文）  2023年全国乙卷（理）  2023年北京卷  2023年天津卷 | ★★★ | 逻辑推理  数学运算 |
| 等差数列的性质及其应用 | 理解 | 2023年北京卷  2022年新高考Ⅱ卷 | ★★☆ | 逻辑推理  数学运算 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，属于中档题，命题热点是以递推式为载体或构建关系式.预计2025年高考命题热点是对实际应用问题的考查 | | | |

### **基础知识·诊断**

#### **夯实基础**

##### **一、等差数列的有关概念**

|  |  |
| --- | --- |
| 定义 | 如果一个数列从第2项起，每一项与它的前一项的差都等于①同一个常数，那么这个数列就叫作等差数列，即,,为常数 |
| 通项公式 | 设是首项为，公差为的等差数列，则通项公式② |
| 等差中项 | 由三个数,,组成的等差数列可以看成是最简单的等差数列，这时，③叫作与的等差中项，根据等差数列的定义可以知道，④ |

##### **二、等差数列的前项和公式**

|  |  |
| --- | --- |
| 已知条件 | 前项和公式 |
| ,, | ⑤ |
| ,, | ⑥ |

###### **知识 拓展**

1.通项公式的推广：.

2.若为等差数列，且，则.

3.若是等差数列，公差为，则，，，是公差为的等差数列.

4.数列，，， 也是等差数列.

5.若等差数列的前项和为，则为等差数列.

6.若数列的通项公式是（其中，为常数），则数列一定是等差数列，且公差为.

7.在等差数列中，若，，则存在最大值；若，，则存在最小值.

8.等差数列的单调性：当时，是递增数列；当时，是递减数列；当时，是常数列.

9.数列是等差数列，为常数，这里公差.

10.在等差数列中，若项数为偶数,则,,;

若项数为奇数,则,,.

11.若数列与均为等差数列，且前项和分别为与，则（其中,）.

#### **诊断自测**

##### **题组1 走出误区**

1. 判一判.（对的打“√”,错的打“×”）

（1） 等差数列的单调性是由公差决定的.( √ )

（2） “数列为等差数列”的充要条件是“对任意，都有”.( √ )

（3） 若数列满足，则数列为等差数列.( × )

（4） “数列为等差数列”的充要条件是“数列的通项公式是关于的一次函数”.( × )

2. （多选题）（易错题）设是等差数列，为公差，是其前项和，且，，则下列结论正确的是( ABD ).

A. B.

C. D. 与均为的最大值

**【易错点】**本题容易对等差数列的公式理解不到位.

[解析]，则，，则，则，，，则，所以，由，知，是中的最大值.从而，，均正确.故选.

##### **题组2 走进教材**

3. （人教A版选修改编）已知是等差数列的前项和，为数列的前项和，若,,则.

[解析]设数列的首项为,公差为,因为是等差数列，所以,,所以是首项为,公差为的等差数列. 由,得 解得因此.

4. （多选题）（人教A版选修②P23·例9改编）已知，是等差数列的前项和,则与的大小关系可能是( ABC ).

A. B.

C. D. 无法判定

[解析]为公差.当时，;当时，;当时，.故选.

##### **题组3 走向高考**

5. [2023·新高考Ⅰ卷]记为数列的前项和，设甲：为等差数列；乙：为等差数列.则( C ).

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

[解析]若为等差数列，设其公差为，则，所以，，故，为常数，故为等差数列，即甲 乙. 若为等差数列，设其公差为，则，所以，当时，； 当时，也满足上式.故，，为常数，所以为等差数列，即甲⇐乙.故甲是乙的充要条件.故选.

### **考点聚焦·突破**

#### **考点一 等差数列的基本量的计算［自主练透］**

1. [2023·全国甲卷]记为等差数列的前项和.若,，则( C ).

A. 25 B. 22 C. 20 D. 15

[解析]设等差数列的公差为，首项为，依题意可得，

，即,

又，解得,，所以.故选.

2. [2023·全国乙卷]已知等差数列的公差为，集合，若,，则( B ).

A. B. C. 0 D.

[解析]依题意，在等差数列中，，显然函数的周期为3，而，即最多有3个不同的取值，又，所以在,,中，或或.

当或时，令，即 ,，解得,，所以，;

当时，,

即 ,,解得,,所以.

综上，.故选.

3. （双空题）（原创）已知为等差数列，公差，其前项和为，若也是以为公差的等差数列，则,.

[解析]考虑到等差数列的通项公式是关于的一次函数，其前项和公式是关于的且没有常数项的二次函数，

因为也是以为公差的等差数列，即也是关于的一次函数，所以满足解得,或（舍去）,则，所以.



**等差数列基本运算的常见类型及解题策略**

|  |  |
| --- | --- |
| 类型 | 解题策略 |
| 求公差或项数 | 在求解时，一般要运用方程思想 |
| 求通项公式 | 确定两个基本量和 |
| 求特定项 | 利用等差数列的通项公式或性质求解 |
| 求前项和 | 利用等差数列的前项和公式直接求解或利用等差中项间接求解 |

#### **考点二 等差数列的判定与证明［师生共研］**

典例1 [2024·福建模拟]已知数列的前项积为，且.求证：是等差数列.

[解析]由数列的前项积为，得，

故，从而，由，得，所以，故是首项为3，公差为2的等差数列.



**等差数列的四种判定与证明方法**

|  |  |
| --- | --- |
| 定义法 | 的值为同一常数是等差数列 |
| 等差中项法 | 成立是等差数列 |
| 通项公式法 | 若数列的通项公式满足,为常数的形式，则可以推出是首项为，公差为的等差数列，该方法适用于选择题、填空题 |
| 前项和法 | 若数列的前项和公式满足,为常数的形式，则可以推出数列是首项为，公差为的等差数列，该方法适用于选择题、填空题 |

##### **针对训练**

（改编）已知递增数列的首项，记数列的前项和为，,且数列{}是等差数列.求证：数列是等差数列.

[解析]设{}的公差为,因为,,所以，,所以,则，

所以,则，当时，也满足上式，此时公差为,所以数列为等差数列.

#### **考点三 等差数列的性质及其应用［多维探究］**

##### **等差数列项的性质角度1**

典例2（1） 已知数列满足，，，则( B ).

A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

[解析]因为，所以是等差数列，由等差数列的性质可得，，所以，，所以.故选.

（2） [2024·黑龙江模拟]已知等差数列满足，则数列的前13项和为( A ).

A. 26 B. 39 C. 52 D. 104

[解析]由等差数列的性质可得，，所以由可得，解得，所以数列的前13项和.故选.

##### **等差数列前项和的性质角度2**

典例3（1） [2024·渭南模拟]设等差数列的前项和为，若，，则( B ).

A. 20 B. 30 C. 40 D. 50

[解析]由等差数列的前项和的性质可得，，也成等差数列，所以，所以，解得.故选.

（2） [改编]已知等差数列的前项和为，若，则( C ).

A. B. C. D.

[解析]设，则，因为是等差数列，所以,,,成等差数列，该数列的首项为，公差为，则，，所以.故选.



**应用等差数列的性质解题的两个注意点**

1.如果为等差数列，,那么.因此，若出现，，等项时，可以利用此性质将已知条件转化为与（或其他项）有关的条件；若求项，可由转化为求，或的值.

2.要注意等差数列通项公式及前项和公式的灵活运用，如,，，等.

##### **等差数列前项和的最值角度3**

典例4 已知等差数列的前项和有最小值，且，则使成立的正整数的最小值为( D ).

A. 9 B. 10 C. 17 D. 18

[解析]由题意可知,，所以数列是递增数列，因为，所以,，所以,，又因为，所以，则，所以使成立的正整数的最小值为18.故选.



1.函数法：利用等差数列前项和的函数表达式，通过配方或借助图象求二次函数最值的方法求解.

2.邻项变号法

（1）当，时，满足的项数使得取得最大值；

（2）当，时，满足的项数使得取得最小值.

##### **多维训练**

1. 已知等差数列，的前项和分别为，，若，则( A ).

A. B. C. D.

[解析]由，得，又等差数列的前项和的表达式满足，所以，所以,，

故.故选.

2. [2024·济宁联考]已知等差数列的前项和为，且.设，记数列的前项和为，则当取得最大值时，的值为6或8.

[解析]设数列的公差为,由,得,解得,则，且，

所以.

当时，；，，且；

当时，.故当或时，取得最大值.